UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Nivelación 2014

MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

IGUALDAD DE ÁNGULOS 1
ÁNGULOS CUYOS LADOS SON RESPECTIVAMENTE PARALELOS 1
ÁNGULOS CUYOS LADOS SON RESPECTIVAMENTE PERPENDICULARES 3
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS 4
APLICACIONES (TEOREMA DE PITÁGORAS) 8

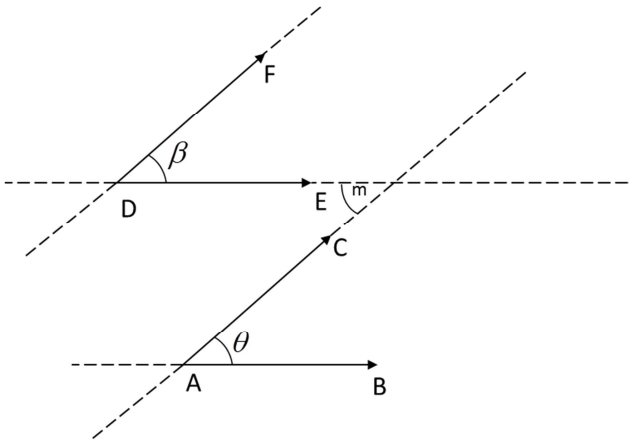
Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

IGUALDAD DE ÁNGULOS

Para determinar si dos triángulos son semejantes es necesario verificar cuando dos ángulos son iguales

ÁNGULOS CUYOS LADOS SON RESPECTIVAMENTE PARALELOS

$a)$



$\overline{AB} // \overline{DE},\ \overline{AC} // \overline{DF}$

$\measuredangle\theta = \measuredangle m \leftarrow$ Alternos internos

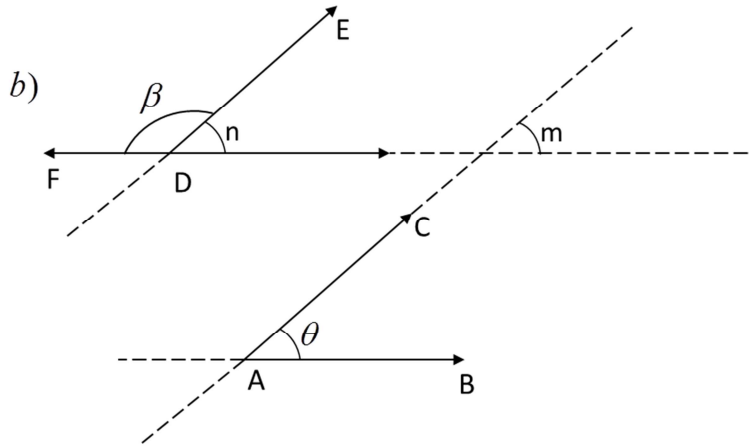
$\measuredangle m = \measuredangle\beta \leftarrow$ Alternos internos

entonces:

$\measuredangle\theta = \measuredangle\beta \leftarrow$ Ley transitiva

"Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos son iguales"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



$\overline{AB} // \overline{DF}$, pero sentidos opuestos

$\overline{AC} // \overline{DE}$

$\measuredangle\theta = \measuredangle m \leftarrow$ Correspondientes

$\measuredangle n = \measuredangle m \leftarrow$ Correspondientes

$\measuredangle\theta = \measuredangle n \leftarrow$ Ley transitiva

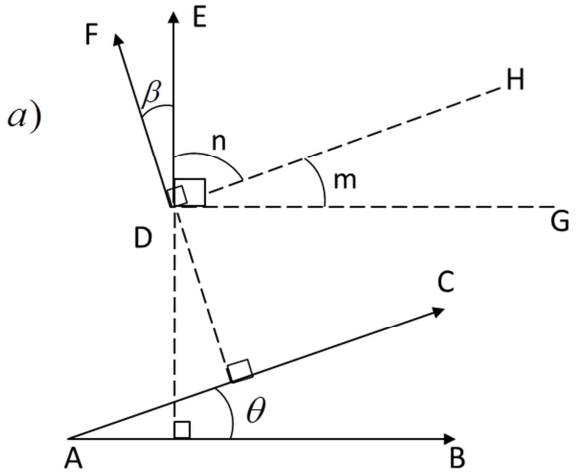
$\measuredangle\beta + \measuredangle n = 180°$

$\measuredangle\beta + \measuredangle\theta = 180°$

"Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, dos de ellos en el mismo sentido y los otros dos en sentidos contrarios, son suplementarios, o sea que su suma es 180°"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

ÁNGULOS CUYOS LADOS SON RESPECTIVAMENTE PERPENDICULARES



$\overline{AB} \perp \overline{DE},\ \overline{AC} \perp \overline{DF}$

$\overline{AB} // \overline{DG},\ \overline{AC} // \overline{DH}$

$\measuredangle\theta = \measuredangle m \leftarrow$ ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos

$\measuredangle m + \measuredangle n = 90°$

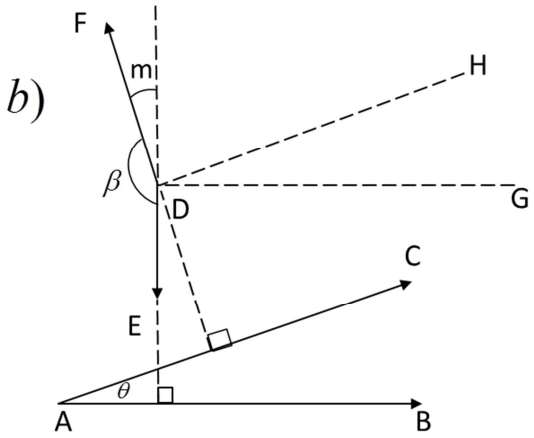
$\measuredangle\theta + \measuredangle n = 90°$

$\measuredangle\beta + \measuredangle n = 90°,$ entonces

$\measuredangle\theta = \measuredangle\beta$

"Dos ángulos cuyos lados so respectivamente perpendiculares son iguales"

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



$\overline{AB} \perp \overline{DE},\ \overline{AC} \perp \overline{DF}$

$\overline{AB} // \overline{DG},\ \overline{AC} // \overline{DH}$

$\measuredangle\theta = \measuredangle m \leftarrow$ ángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares

$\measuredangle\beta + \measuredangle m = 180°$

$\measuredangle\beta + \measuredangle\theta = 180°$

"Dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios"

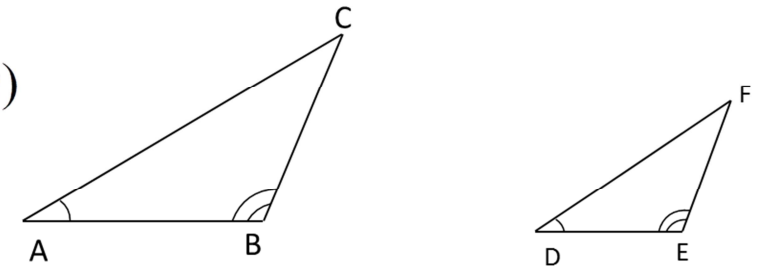
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

"Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales"

Ejemplos

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

a)



$\overline{AB} // \overline{DE}$ y $\overline{AC} // \overline{DF} \Rightarrow \measuredangle BAC = \measuredangle EDF$

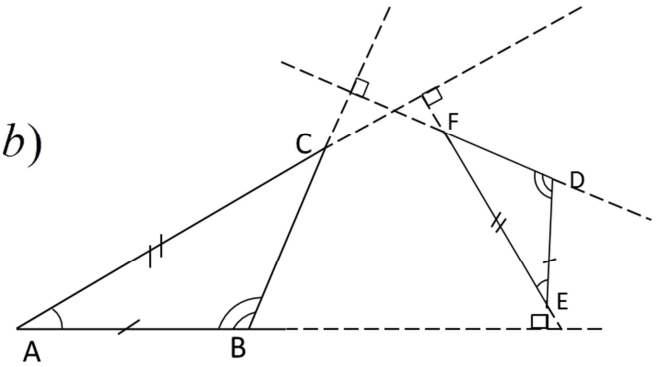
$\overline{BC} // \overline{EF}$ y $\overline{AB} // \overline{DE} \Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle DEF$

$\overline{AC} // \overline{DF}$ y $\overline{BC} // \overline{EF} \Rightarrow \measuredangle ACB = \measuredangle DFE$

Entonces los trángulos ABC y DEF son semejantes, en símbolos:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

b)



$\overline{AB} \perp \overline{DE}$ y $\overline{AC} \perp \overline{EF} \Rightarrow \measuredangle BAC = \measuredangle DEF$

$\overline{AB} \perp \overline{DE}$ y $\overline{BC} \perp \overline{DF} \Rightarrow \measuredangle EDF = \measuredangle ABC$

$\overline{AC} \perp \overline{EF}$ y $\overline{BC} \perp \overline{DF} \Rightarrow \measuredangle ACB = \measuredangle EFD$

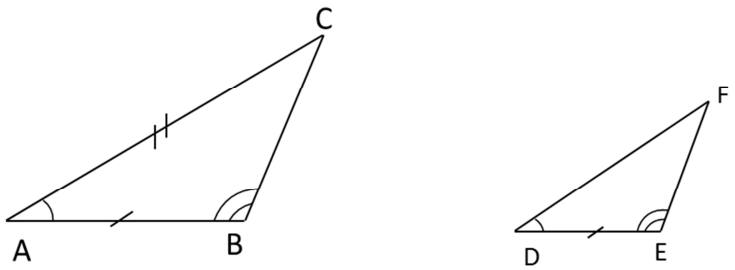
Entonces los triángulos ABC Y DEF son semejantes

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

LADOS HOMÓLOGOS

Son los lados que se oponen a dos ángulos iguales.

Ejemplo



$\left.\begin{array}{l} \measuredangle A = \measuredangle D \\ \measuredangle B = \measuredangle E \\ \measuredangle C = \measuredangle F \end{array}\right\}$ Lados respectivamente paralelos

$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ Son lados homólogos

$\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ Son lados homólogos

$\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ Son lados homólogos

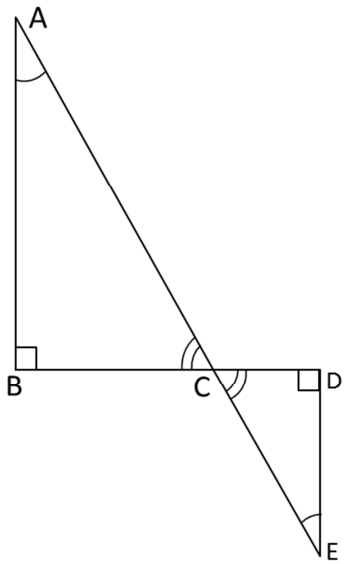
Con los lados homólogos se puede establecer una proporción (igualdad de dos razones).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Note que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son lados de un mismo triángulo (los numeradores de las fracciones) y que $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$ son los lados del otro triángulo (los denominadores de las fracciones).

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo



$\overline{AB} // \overline{DE}$
$\overline{AB} \perp \overline{BD}$
$\overline{DE} \perp \overline{BD}$
$\overline{DE} = 4m$
$\overline{CD} = 2m$
$\overline{BC} = 6m$

CALCULE $\overline{AB}$

Solución.

$\measuredangle BAC = \measuredangle CED \leftarrow$ Lados paralelos

$\measuredangle DCE = \measuredangle BCA \leftarrow$ Opuestos por el vértice

$\Delta ABC \sim \Delta CDE$

$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son lados homólogos

$\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son lados homólogos

$\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ son lados homólogos

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$, sustituyendo, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, se tiene:

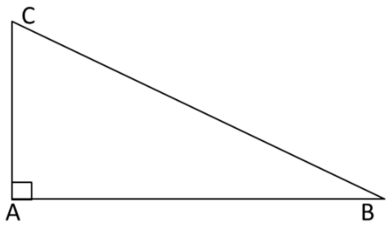
$\frac{\overline{AB}}{4} = \frac{6}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 4\left(\frac{6}{2}\right) \Rightarrow \overline{AB} = 12m$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

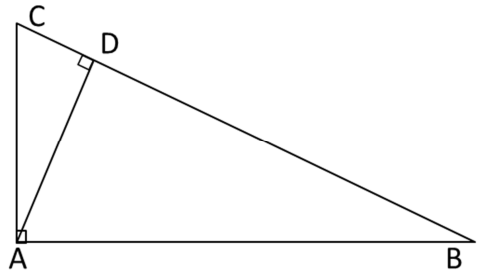
APLICACIONES (TEOREMA DE PITÁGORAS)

Aplicaremos la semejanza de triángulos para tratar de deducir el teorema de Pitágoras.

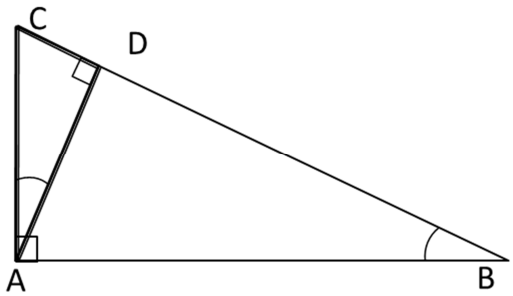
Se tiene el siguiente triángulo rectángulo.



Al trazar la altura desde el vértice A se forman los triángulos ADC y ADB, así:



a) RELACIÓN ENTRE LOS TRIÁNGULOS
ABC Y *ADC*



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

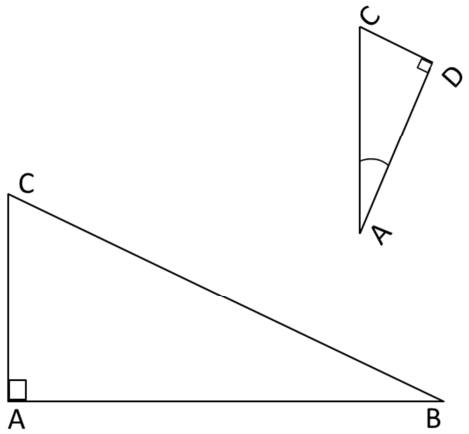
$\overline{AB} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AD} \Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle DAC$

$\measuredangle BAC = \measuredangle ADC = 90°$

$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD$

Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta ADC$

Para determinar los lados homólogos se dibujan los triángulos por separado, así:



$\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son homólogos

$\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ "

$\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ "

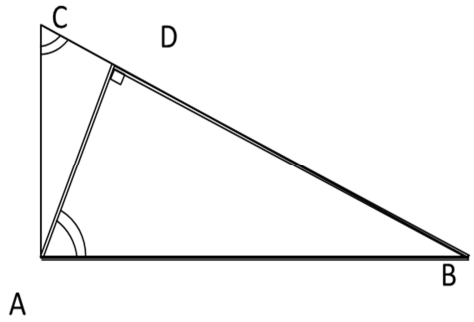
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \rightarrow$$

$$\left(\overline{AC}\right)\left(\overline{AC}\right) = \left(\overline{DC}\right)\left(\overline{BC}\right)$$

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{DC}\right)\left(\overline{BC}\right) \quad (1)$$

b) RELACIÓN ENTRE LOS TRIÁNGULOS
ABC Y *ABD*

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



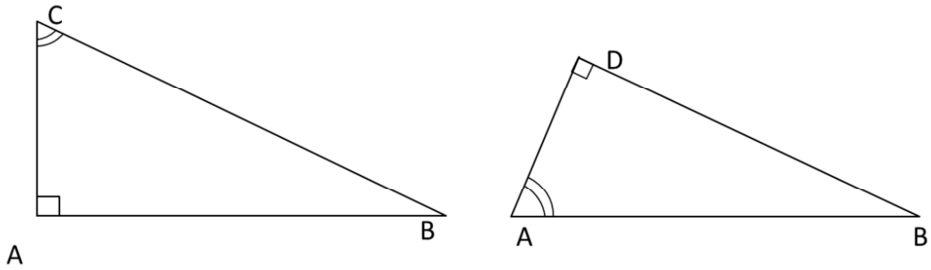
$\overline{AB} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AD} \Rightarrow \measuredangle BAD = \measuredangle ACB$

$\measuredangle ADB = \measuredangle BAC = 90°$

$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC$

Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta ABD$

Dibujando por separado los triángulos para indentificar los lados homólogos



$\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ son ángulos homólogos

$\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ "

$\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ "

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\left(\overline{AB}\right)\left(\overline{AB}\right) = \left(\overline{BD}\right)\left(\overline{BC}\right)$$

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)\left(\overline{BC}\right) \quad (2)$$

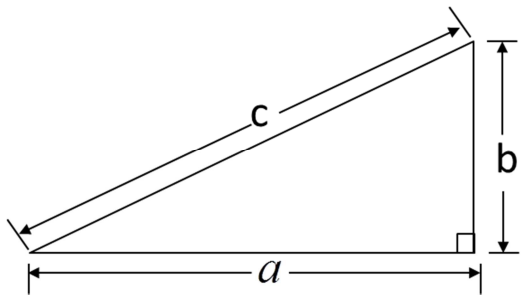
Sumando (1) y (2)

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{BC}\right)\left(\overline{DC}\right)+\left(\overline{BD}\right)\left(\overline{BC}\right)$$
$$=\left(\overline{BC}\right)\left(\left(\overline{DC}\right)+\left(\overline{BD}\right)\right)$$
$$=\left(\overline{BC}\right)\left(\overline{BC}\right),\ \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$$
$$\boxed{\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{BC}\right)^2}$$

" El cuadrado de un cateto $\left(\overline{AB}\right)$ más el cuadrado del otro cateto $\left(\overline{AB}\right)$ es igual al cuadrado de la hipotenusa $\left(\overline{BC}\right)$".

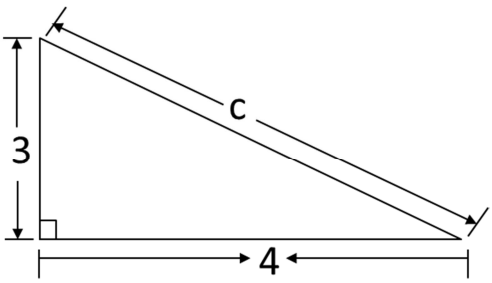
En símbolos:



$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

Ejemplo. En el triángulo siguiente calcule el valor del lado indicado:

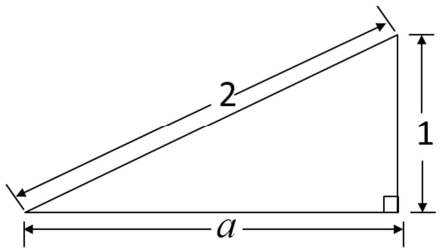
1)



$$(3)^2+(4)^2=c^2$$
$$9+16=c^2$$
$$25=c^2$$
$$c=\sqrt{25}\Rightarrow c=5$$

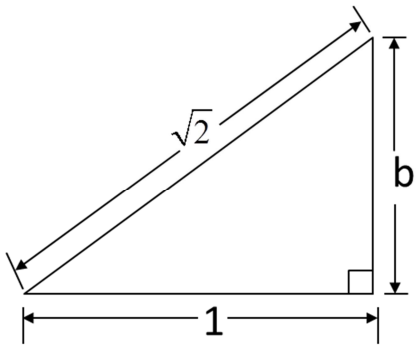
Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

2)



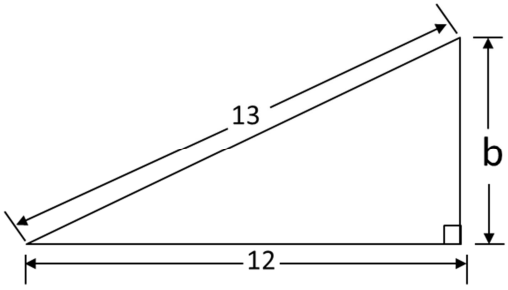
$$a^2+(1)^2=2^2$$
$$a^2+1=4$$
$$a^2=4-1$$
$$a^2=3$$
$$a=\sqrt{3}$$

3)



$$(1)^2+(b)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$1+b^2=2$$
$$b^2=2-1$$
$$b^2=1$$
$$b=1$$

4)

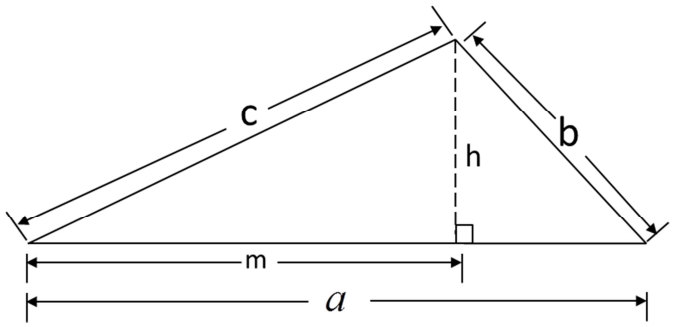


$$(12)^2+b^2=(13)^2$$
$$144+b^2=169$$
$$b^2=169-144$$
$$b^2=25$$
$$b=5$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejercicios: Deducir una fórmula para el área de un triángulo en función de la longitud de los lados y del semi-perímetro.

Solución:



P: Perímetro

a, b y c: Longitud conocida de los lados del triángulo

h: Altura (no se conoce su longitud).

$P = a+b+c$ y S: Semi-perímetro

$$S = \frac{a+b+c}{2} \rightarrow 25 = a+b+c \quad (0)$$

$$25-a = b+c \quad (1)$$

$$25-b = a+c \quad (2)$$

$$25-c = a+b \quad (3)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$\boxed{A=\frac{1}{2}(a)h} \rightarrow 2A=ah \Rightarrow$

$$4A^2=a^2h^2 \quad (4)$$

$h^2=b^2-(a-m)^2$ pero $m^2=c^2-h^2$, entonces

$$h^2=b^2-\left(a-\sqrt{c^2-h^2}\right)^2$$

$$h^2=b^2-\left(a^2+\left(c^2-h^2\right)-2a\sqrt{c^2-h^2}\right)$$

$$h^2=b^2-a^2-c^2+h^2+2a\sqrt{c^2-h^2}$$

$$-2a\sqrt{c^2-h^2}=b^2-a^2-c^2$$

$$\sqrt{c^2-h^2}=\frac{b^2-a^2-c^2}{-2a}$$

$$\sqrt{c^2-h^2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$\left[\sqrt{c^2-h^2}\right]^2=\left[\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right]^2$$

$$c^2-h^2=\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2}$$

$$h^2=c^2-\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2}$$

$$h^2=\frac{4a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2}$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$4A^2=a^2\left[\frac{4a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2}\right]$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

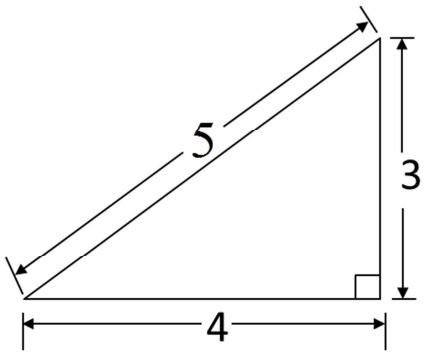
$$16A^2 = 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2$$
$$= \left[2ac - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right]\left[2ac + \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right]$$
$$= \left[2ac - a^2 - c^2 + b^2\right]\left[2ac + a^2 + c^2 - b^2\right]$$
$$= -\left[a^2 - 2ac + c^2 - b^2\right]\left[a^2 + 2ac + c^2 - b^2\right]$$
$$= -\left[\left(a^2 - 2ac + c^2\right) - b^2\right]\left[\left(a^2 + 2ac + c^2\right) - b^2\right]$$
$$= -\left[(a-c)^2 - b^2\right]\left[(a+c)^2 - b^2\right]$$
$$= -\left[(a-c) - b\right]\left[(a-c) + b\right]\left[(a+c) - b\right]\left[(a+c) + b\right]$$
$$= (b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)(a + c + b)$$
$$16A^2 = \left((b+c) - a\right)\left((a+b) - c\right)\left((a+c) - b\right)(a + c + b) \quad (6)$$

Sustituyendo (0), (1), (2) y (3) en (6)

$$16A^2 = \left((2S - a) - a\right)\left((2S - c) - c\right)\left((2S - b) - b\right)(2S)$$
$$16A^2 = (2S - 2a)(2S - 2c)(2S - 2b)(2S)$$
$$= (2)(S - a)(2)(S - c)(2)(S - b)(2)(S)$$
$$= 16(S - a)(S - b)(S - c)(S)$$
$$A^2 = S(S - a)(S - b)(S - c)$$
$$\boxed{A = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}}$$

Ejemplo. Calcule el área

1)

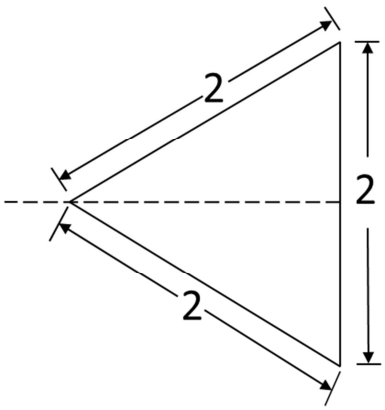


$$P = 3 + 5 + 4 = 12$$
$$S = \frac{P}{2}$$
$$S = 6$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$=\sqrt{6(6-4)(6-3)(6-5)}$$
$$=\sqrt{6(2)(3)(1)}$$
$$=\sqrt{36}$$
$$=6\mu^2$$

2)



$$P=2+2+2$$
$$P=6$$
$$S=\frac{P}{2}$$
$$S=\frac{6}{2}$$
$$S=3$$

$$A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$A=\sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)}$$
$$A=\sqrt{3}\mu^2$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013